# BÀI 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

# ĐỊNH THỨC

# §2: Định Thức

## 2.1 Mở đầu

- Xét hệ phương trình sau: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Theo phương pháp Grame ta có công thức nghiệm sau:

$$x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}, (D \neq 0)$$

"Định thức" cấp 2

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}; D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}; D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

Xét hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Ta có thể định nghĩa: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ?$

Đại Số Tuyến Tính

# §2: Định Thức

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ? \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = ?$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = ?$$

$$x = \frac{D_x}{D}; \quad y = \frac{D_y}{D};$$

$$z = \frac{D_z}{D}, \quad (D \neq 0)$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- **Định thức cấp 2:**

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2.6 - 5.3 = -3.$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- **Định thức cấp 3:** **(Quy tắc hình sao)**

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{32}a_{21}) \\ &-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{33}a_{21}a_{12} + a_{11}a_{32}a_{23}) \end{aligned}$$

# §2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -108$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = [2.4.(-2)+1.0.3+5.(-1).6] - [5.4.3+2.0.6+1.(-1).(-2)]$$

$$=[-16+0-30]-[60+0+2]=-108$$

Đại Số Tuyến Tính

# §2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -55$$

# §2: Định Thức

- **Ví dụ:** Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1.4.6+3.2.1+3.2.5) -(3.4.3+6.2.2+1.1.5)$$

$$=(24+6+30)-(36+24+5)=60-65=-5$$

# §2: Định Thức



- **Bài tập:** Tính

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix} = [\,3.(-2).7+6.1.0+4.5.(-1)\,] - [\,4.(-2).6+7.1.5+3.0.(-1)\,]$$

$$= -62+13 = -49$$

# §2: Định Thức



## 2.2 Định nghĩa

**2.2.1 Đ/n1:** Cho ma trận $A=[a_{ij}]$ vuông cấp n. Phần phụ đại số của $a_{ij}$, kí hiệu là $A_{ij}$, được xác định như sau

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

trong đó $M_{ij}$ là ma trận có được từ ma trận A bằng cách bỏ đi hàng i, cột j.

# §2: Định Thức



- **Ví dụ:** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det(M_{11}) = \qquad\qquad = -6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\det(M_{12}) = (-1)^{3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\det(M_{13}) = (-1)^{4}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

# §2: Định Thức



- **Bài tập:** Với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Tính

$$A_{21} =$$

$$A_{23} =$$

$$A_{33} =$$

# §2: Định Thức

## 2.2.2 Đ/n 2.

Cho ma trận vuông cấp n $A=[a_{ij}]$

Định thức của A là một số được kí hiệu là detA, hay

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định quy nạp theo n như sau:

- Nếu n=1 thì $|[a_{11}]| = a_{11}$.

# §2: Định Thức



- Nếu n=1 thì $|[a_{11}]| = a_{11}$.
- Nếu n>1 thì

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & * & & \end{bmatrix} \to |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

*(khai triển theo hàng 1)*

***- Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n.***

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tính định thức sau: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 4 \quad -3} \\ 5 \quad 2 \quad 1 \\ -3 \quad 6 \quad 0 \end{vmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 1.(-6) + 4.(-3) + (-3).36$$

$$= -126$$

# §2: Định Thức

## 2.3. Tính chất của định thức

(i) $\det A^t = \det A$.

<u>Hq</u> : Một mệnh đề về định thức nếu đã đúng cho hàng thì cũng đúng với cột và ngược lại.

***Do đó, trong các tính chất sau đây ta chỉ phát biểu cho "hàng".***

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

# §2: Định Thức

(ii) Nếu đổi chỗ hai hàng bất kì của định thức thì định thức đổi dấu

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ x & y & z \end{vmatrix} \overset{h1 \leftrightarrow h3}{=} -\begin{vmatrix} x & y & z \\ * & * & * \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

**Hq.** Khi tính định thức ta có thể khai triển theo hàng và cột bất kì.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{j=4}{=} a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$= 0.A_{14} + 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0.A_{34} + (-2)(-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 86$$

# §2: Định Thức



- **Ví dụ:** Tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ \boxed{-1 \quad 0 \quad 6 \quad 0} \end{vmatrix} \overset{i=4}{=} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 6(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (24-5) - 6(-3-26)$$

$$= 19 + 174 = 193$$

# §2: Định Thức



- **Bài Tập:** Tính định thức sau

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 102$$

# §2: Định Thức



(iii) Nếu các phần tử của một hàng nào đó của định thức có dạng tổng của 2 số hạng thì ta có thể viết định thức thành tổng của 2 định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

(các phần tử còn lại giữ nguyên)

# §2: Định Thức



- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a+b & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ b & d \end{vmatrix}$$

# §2: Định Thức



**(iv)** Nếu nhân một hàng nào đó của định thức với một số λ thì được định thức mới bằng λ lần định thức cũ.

**Hq:** *(1)* Nếu các phần tử của một hàng có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số đó ra ngoài dấu định thức.

(2) $\boldsymbol{det(\lambda A) = \lambda^n det A,\ \lambda} \in \mathbb{R}.$

- **Ví dụ:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};\ 2A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\det(2A) = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.2 & 2.5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2.3 & 2.4 \end{vmatrix} = 2.2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^2 \det(A).$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

(3) Nếu A có một hàng bằng không thì định thức của nó bằng không.

(4) Nếu A có hai hàng bằng nhau hay tỉ lệ với nhau thì định thức của nó bằng không.

- **Ví dụ:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{h1 \leftrightarrow h3} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

$$\det(A) = \det(B) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = -\det(A).$$

# §2: Định Thức



**(v)** Nếu thêm vào một hàng của định thức bội λ của hàng khác thì định thức không đổi.

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix} \overset{h2+(-4)h1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

# §2: Định Thức



**(vi)** Định thức của ma trận chéo bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{i=1}{=} a_{11}A_{11} = 2\begin{vmatrix} \boxed{-3 \quad 0 \quad 0} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{i=1}{=} 2.(-3)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2.(-3).5.1}$$

# §2: Định Thức



- Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

- **Ví dụ:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.3.2.5 = 30$$

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

(vii) Cho A, B là các ma trận vuông cấp n. Khi đó

$$\det(AB) = \det A . \det B$$

# §2: Định Thức



- **Ví dụ:** Cho 2 ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 8 & 31 \\ 9 & 33 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5; \det(B) = -3$$

$$\det(AB) = -15 = 5.(-3) = \det(A).\det(B)$$

# §2: Định Thức

## 2.4 Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

1) $A \xrightarrow{[illegible]} B \Rightarrow \det(B) = -\det(A)$

2) $A \xrightarrow{[illegible]} B \Rightarrow \det(B) =$ [illegible]

3) $A \xrightarrow{[illegible]} B \Rightarrow \det(B) = \det(A)$

# §2: Định Thức

- **Ví dụ 1:** Tính định thức

$$D=\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\2&3&1&5\\-1&6&5&-2\\3&4&-2&7\end{vmatrix}\overset{h_2-2h_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-1&3\\0&-1&3&-1\\-1&6&5&-2\\3&4&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4-3h_1}{\overset{h_3+h_1}{=}}\begin{vmatrix}1&\mathbf{2}&\mathbf{-1}&\mathbf{3}\\0&\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{-1}\\0&\mathbf{8}&\mathbf{4}&\mathbf{1}\\0&-2&1&-2\end{vmatrix}\overset{j=1}{=}a_{11}A_{11}=1.\begin{vmatrix}-1&3&-1\\8&4&1\\-2&1&-2\end{vmatrix}$$

# §2: Định Thức



- **Ví dụ 2:** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \overset{h_1 \leftrightarrow h_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{h_4 - 4h_1}{\overset{h_3 + 2h_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

# §2: Định Thức

- **Bài tập:** Tính định thức sau

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 58$$

# §2: Định Thức

- **Ví dụ 3:** Tính định thức cấp n sau

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \overset{h_2 - h_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

- Tiếp tục hàng 3 trừ hàng 1, hàng 4 trừ hàng 1, …

# §2: Định Thức

Đại Số Tuyến Tính

- Ta được:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$