Bài 3

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Xét phương trình: $a\,x = b$.

Ta có: $x = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{a}b = a^{-1}b.(a \neq 0)$

Tương tự lập luận trên thì liệu ta có thể có

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B\,.$$

như vậy A^{-1} là ma trận sẽ được định nghĩa như thế nào?

§3: Ma trận nghịch đảo

Ta để ý:

$$\begin{aligned} & ax = b \\ \Leftrightarrow\ & a^{-1}ax = a^{-1}b \\ \Leftrightarrow\ & 1x = a^{-1}b \\ \Leftrightarrow\ & x = a^{-1}b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & AX = B \\ \Leftrightarrow\ & A^{-1}AX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & IX = A^{-1}B \\ \Leftrightarrow\ & X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Phải chăng $A^{-1}A = I$?

§3: Ma trận nghịch đảo

3.1 Định nghĩa.

a. Đ/n: Cho ma trận A vuông cấp n. Ta nói ma trận A là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận B sao cho

$$\mathbf{AB=BA=E_n}$$

Khi đó, B gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A, kí hiệu là A^{-1}.

Như vậy, $A.A^{-1} = A^{-1}A=E_n$

§3: Ma trận nghịch đảo

Nhận xét:

(1) Ma trận đơn vị E_n khả nghịch và

$$(E_n)^{-1}=E_n$$

(2) Ma trận không θ không khả nghịch vì

$$\theta.A = A.\theta = \theta, \quad \forall A$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Nhận xét:

Ta nhấn mạnh rằng tính khả nghịch chỉ có nghĩa đối với ma trận vuông. Tuy nhiên không phải ma trận vuông nào cũng khả nghịch. Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên $\mathbb{R}$ khả nghịch được kí hiệu là $GL_n(\mathbb{R})$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

b. Tính chất:

Cho A, B là các ma trận khả nghịch và một số $k \neq 0$. Khi đó, AB, kA và A^{-1} là các ma trận khả nghịch và

$$(i)\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(ii)\ (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(iii)\ (A^{-1})^{-1} = A$$

§3: Ma trận nghịch đảo

c. Ma trận phụ hợp

Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n. Ma trận phụ hợp của A, kí hiệu là P_A ,được định nghĩa như sau:

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của ma trận A.

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ1:** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = 28 \quad A_{21} = -29 \quad A_{31} = -12$

$A_{12} = 14 \quad A_{22} = -5 \quad A_{32} = -6$

$A_{13} = -6 \quad A_{23} = 13 \quad A_{33} = 8$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Đại Số Tuyến Tính

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ 2:** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = -1 \quad A_{21} = 0 \quad A_{31} = 0$

$A_{12} = 5 \quad A_{22} = -2 \quad A_{32} = 0$

$A_{13} = 17 \quad A_{23} = -8 \quad A_{33} = 2$

$$P_A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

3.2 Cách tính ma trận nghịch đảo

a. Sử dụng phần phụ đại số

Định lý: Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$P_A.A = A.P_A = \det A.E$$

trong đó, P_A là ma trận phụ hợp của ma trận A.

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ:

$$AP_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28 & -29 & -12 \\ 14 & -5 & -6 \\ -6 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 38 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} = 38 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

<u>Định lý:</u> Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông A khả nghịch là $\det A \neq 0$. Khi đó,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ:**

$$A^{-1} = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 28 & -29 & -12 \\ 14 & -5 & -6 \\ -6 & 13 & 8 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -1$$

$$P_A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 2 \quad P_A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

Chú ý: Đối với ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow P_A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

b. Phương pháp Gauss-Jordan

Cho ma trận A có $\det A \neq 0$.

-Viết ma trận đơn vị E vào đằng sau ma trận A, được ma trận $[A|E]$

-Sử dụng phép biến đổi sơ cấp ***theo hàng*** chuyển ma trận $[A|E]$ về dạng $[E|B]$

-Khi đó $B=A^{-1}$

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Lời giải:

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\1&2&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{h_3+(-1)h_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&4&0&1&0\\0&0&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_1+3h_3]{h_2+4h_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-2&0&3\\0&1&0&-4&1&4\\0&0&-1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{h_1+(-2)h_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&-2&-5\\0&1&0&-4&1&4\\0&0&-1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{h_3\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&-2&-5\\0&1&0&-4&1&4\\0&0&1&1&0&-1\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Bài toán: Tìm ma trận X thỏa mãn

1) $AX = B$
2) $XA = B$
3) $AXB = C$
4) $AX + kB = C$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- Ta có:

1) $AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow EX=A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

2) $XA=B \Leftrightarrow XAA^{-1}=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow XE=BA^{-1}$

$\Leftrightarrow X=BA^{-1} \neq A^{-1}B$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- Ta có:

3) $\mathrm{AXB}=\mathrm{C} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\mathrm{AXB}=\mathrm{A}^{-1}C$

$$\Leftrightarrow \mathrm{XBB}^{-1}=\mathrm{A}^{-1}CB^{-1}$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

4) $AX+kB=C \Leftrightarrow AX=(C-kB)$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C-kB)$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}(C-kB)$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ 1:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng: $AX=B$

Ta có: $X = A^{-1}B$

§3: Ma trận nghịch đảo

Vậy

$$X=\begin{bmatrix}1 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & -18\\ 8 & 16\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ 2:** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$X\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 5\end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$XA+2B=C$$

$$\Leftrightarrow X=(C-2B)A^{-1}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- Ta có $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; C - 2B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

Với $X = (C - 2B)A^{-1}$ nên

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}(-\frac{1}{2})\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -26 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 13 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

- **Ví dụ 3.** Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình có dạng

$$AXB = C$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Dùng ma trận nghịch đảo giải hệ phương trìnhsau:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = -1 \\ 4x + 3y + 5z = 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

§3: Ma trận nghịch đảo

Đại Số Tuyến Tính

- **Bài tập:**

1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(x) = x^2 - 5x + 1$

Tính f(A). Tìm ma trận X thỏa mãn $(5A^2 - A^3)X = A^t$

2. Cho các ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -1 \\ -2 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Tính det(B-2C) và tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có)

b) Tìm ma trận X thỏa mãn $X(AB - 2AC) = (B - 2C)^2$

(Đề thi K55 – Đề 1 – Đề 3)