$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 9 \\ 2x + 3y + z &= 6 \\ x - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{No Solution}}$

BÀI 5

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

5.1 Dạng tổng quát và dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính.

5.1.1. Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

trong đó a_{ij} là hệ số của pt thứ i của ẩn x_j, b_i là hệ số tự do của phương trình thứ i, x_j là các ẩn số (i=1,..,m, j=1,..,n).

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

- Nếu $b_i = 0$ với mọi i=1,2,…,m thì hệ được gọi là hệ tuyến tính thuần nhất.

Ví dụ

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

→Hệ 4 phương trình 4 ẩn

→Là hệ không thuần nhất

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

+ Ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ gọi là ma trận hệ số của hệ phương trình (*).

+ Ma trận $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$ gọi là ma trận hệ số tự do của hệ phương trình (*).

+ Ma trận $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận ẩn số của hệ phương trình (*).

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Đại Số Tuyến Tính

- **Ví dụ:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Ma trận bổ sung của hệ (*):

$$A^{bs} = \overline{A} = [A \mid b]$$

- **Ví dụ:** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases} \leftrightarrow A^{bs} = \overline{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -7 & 9 \end{array}\right]$$

Nhận xét: Các hệ số của phương trình thứ i là các phần tử ở hàng thứ i của A^{bs} và ngược lại.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

Với các kí hiệu đó, hệ (*) được đưa về dạng

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad (**)$$

gọi là dạng ma trận của hệ (*).

- **Ví dụ:**

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = 9 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 5x + 9y + 2z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

5.2. Hệ Cramer

Định nghĩa: Hệ phương trình tuyến tính n pt, n ẩn số mà ma trận hệ số không suy biến được gọi là hệ Cramer

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \det A = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ trên là một hệ Cramer.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

Định lý: Mọi hệ Cramer n pt đều có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được xác định bởi công thức

$$\boxed{x_j = \frac{D_j}{D}}$$

trong đó D *là định thức của ma trận hệ số của hệ,* D_j *là định thức nhận được từ* D *bằng cách thay cột thứ* j *bởi cột tự do,* $j = \overline{1, n}$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

Chứng minh. Cho hệ Cramer n phương tình, n ẩn số với ma trận hệ số là A, cột tự do B. Khi đó hệ có dạng ma trận là

$$AX = B \tag{2.5}$$

Vì A không suy biến nên $D = \det A \neq 0$ và A khả nghịch

Lúc đó ta có

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $X = A^{-1}B$.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

Ví dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 & = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 & = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 & = 16 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \det A = 2 \neq 0.$$

Do đó hệ trên là một hệ Cramer.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -2.$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

$$x_j = \frac{D_j}{D};\ j = \overline{1, n} \qquad (2.4)$$

Vậy hệ có nghiệm là:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{2} = 3,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

- **Bài tập:** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -19$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -29$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.2 Hệ Crame

$$x_1 = D_1 / D = -19 / -8$$

$$x_2 = D_2 / D = -29 / -8$$

$$x_3 = D_3 / D = -9 / -8$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ phương trình tuyến tính

5.3. Giải hệ phương trình bằng PP Gauss

5.3.1. Các phép biến đổi tương đương hệ phương trình

- Nhân một số ($\lambda \neq 0$) vào 2 vế của 1 PT của hệ.
- Đổi chỗ hai PT của hệ.
- Nhân một số ($\lambda \neq 0$) vào một PT rồi cộng vào PT khác của hệ.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \overset{pt3\times 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ 2x + 4y + 2z = 10 \end{cases} \overset{pt2\leftrightarrow pt3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

- Như vậy các phép biến đổi tương đương hệ PT chính là các phép BĐSC trên dòng của ma trận bổ sung tương ứng.

VD

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-3z=2 \\ x+2y+z=5 \end{cases} \xrightarrow[pt3+(-1)pt1]{pt2+(-2)pt1} \begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y-5z=0 \\ 3y=4 \end{cases} \xrightarrow{pt3 \leftrightarrow pt2} \begin{cases} x-y+z=1 \\ 3y=4 \\ 3y-5z=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3+(-1)h_1]{h_2+(-2)h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

5.3.2. Định lí Kronecker-Capelli

a. ĐL: *Cho hệ phương trình Ax=b*

$$\textit{Hệ có nghiệm} \Leftrightarrow \boldsymbol{r(A) = r(\bar{A})}$$

Cụ thể hơn, ta có kết quả sau: Nếu Ax=b là hệ n ẩn số, ta có

+ $\boldsymbol{r(A) \neq r(\bar{A})} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm
+ $\boldsymbol{r(A) = r(\bar{A}) = n} \Leftrightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất
+ $\boldsymbol{r(A) = r(\bar{A}) = r < n} \Leftrightarrow$ hệ có vô số nghiệm phụ thuộc (n-r) tham số

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Chứng minh.

Xét hệ phương trình tổng quát sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Giả sử A có hạng là r

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Ta có ma trận bổ sung tương ứng

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Bằng các phép B ĐSC chuyển ma trận bổ sung về dạng:

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{rr} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Khi đó ta có:

- Nếu $r(A) \neq r(\bar{A})$ thì tồn tại ít nhất một trong các $b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n$ khác 0 nên hệ pt vô nghiệm.
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ thì hệ là hệ Cramer, nên có nghiệm duy nhất.
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ thì chuyển các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ sang vế phải ta được hệ:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_r = b_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1,n}x_n \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_r = b_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2,n}x_n \\ \ldots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \ldots + a'_{rr}x_r = b_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{r,n}x_n \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_r = b_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1,n}x_n \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_r = b_2 - a'_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{2,n}x_n \\ \ldots \\ a'_{r1}x_1 + a'_{r2}x_2 + \ldots + a'_{rr}x_r = b_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{r,n}x_n \end{cases}$$

Ta gán cho các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ các giá trị cụ thể ta sẽ được một hệ Cramer với r ẩn $x_1,\ldots,x_r$. Do đó, trong trường hợp này hệ có vô số nghiệm phụ thuộc (n-r) tham số.

Các ẩn $x_1,\ldots,x_r$ gọi là các ẩn cơ sở (cơ bản), còn $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ gọi là các ẩn tự do hay ẩn phụ (tham số).

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

5.3.3. Phương pháp Gauss

Hệ Ax=b → $A^{bs}=[A|b] \xrightarrow[\text{theo hàng}]{\text{Bđsc}} B^{bs}=[B|c]$ (bậc thang)

Khi đó:

+ $r(A)=r(B)$, $r(A^{bs})=r(B^{bs})$

+ $\boldsymbol{Ax = b \Leftrightarrow Bx = c}$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_5-h_1]{\substack{h_2-2h_1 \\ h_4+4h_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_5+h_2]{\substack{h_3+7h_2 \\ h_4-8h_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 - 3h_5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_5 + (-3)h_3]{h_4 + 10h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{17h_5 + 5h_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow r(A^{bs}) = r(A) = 4$ **Hệ có nghiệm duy nhất**

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 17x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1;0;1;0)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 & = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 & = 3 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Giải. Lập ma trận bổ sung:

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận bổ sung về dạng ma trận hình thang:

$$A^{bs} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

$$(2.11) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 & = 1 \end{cases}$$

Chọn x_1, x_2 là ẩn cơ bản. Chọn x_3, x_4, x_5 là các ẩn phụ (tham số) chuyển sang vế phải ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = -x_3 - x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 & = 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 1 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đặt x_3, x_4, x_5 lần lượt là α, β, γ.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= -\alpha - \beta + 2\gamma \\ 3x_2 &= 3\alpha + 3\beta - 5\gamma + 1 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Giải hệ PT bằng PP Gauss

Đại Số Tuyến Tính

Ta có nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\gamma \\ x_2 = \frac{1}{3}(1 + 3\alpha + 3\beta - 5\gamma) \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.3. Giải hệ PT bằng PP Gauss

VD3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

(K55-đề 1)

VD4: Biện luận về số nghiệm của hệ phương trình theo tham số *a, b*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + ax_4 = b \end{cases}$$

(Đề 2-K53)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

5.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định nghĩa 2.2.1. Hệ phương trình tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Dạng ma trận của hệ phương tình tuyến tính thuần nhất là

$$AX = O. \qquad (2.12)$$

Nhận xét. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bao giờ cũng có nghiệm.
Cụ thể bộ số $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ luôn là một nghiệm của hệ và được gọi là *nghiệm tầm thường*.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Mỗi bộ số $(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ không đồng thời bằng không nếu là nghiệm của hệ (2.2.1) thì được gọi là *nghiệm không tầm thường*.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Nhận xét: Trong hệ thuần nhất hạng của ma trận hệ số luôn bằng hạng của ma trận bổ sung

$$A^{bs} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

Khi biện luận cho hệ thuần nhất ta chỉ quan tâm hạng của ma trận hệ số

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

- Hệ thuần nhất chỉ có 2 trường hợp:
  - Hệ có nghiệm duy nhất

    Hạng ma trận hệ số bằng số ẩn của hệ phương trình
  - Hệ có vô số nghiệm

    Hạng ma trận hệ số nhỏ hơn số ẩn của hệ phương trình

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Tóm lại: Hệ thuần nhất n ẩn

- chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi r(A)=n
- có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi r(A)≠n.

VD1. Tìm *m* để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ -x - y + mz = 0 \end{cases}$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Đại Số Tuyến Tính

Ta có ma trận hệ số của hệ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{bmatrix}$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi r(A)<3.

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Cách 1. Ta có:

$$A \xrightarrow[\text{sơ cấp}]{\text{Biến đổi}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{bmatrix}$$

Do đó với $m = -2 \Rightarrow r(A) < 3$

Vậy với $m = -2$ thì hệ có nghiệm không tầm thường

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

§5: Hệ PTTT thuần nhất

Cách 2. Vì r(A)<3 ⇔ detA=0 nên

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & m \end{vmatrix}$$

$$= (3m+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 1. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = b \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + ax_4 = 14 \end{cases}$$

với a, b là tham số

a) Giải phương trình với *a=4, b=-5*

b) Tìm *a, b* để hệ phương trình vô nghiệm.

(Đề 1-K52)

(Đ/s: a) (3;1;-2;1) b) a=10, b≠-11)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

với a, b là tham số

a) Giải phương trình với *a=1, b=3*

b) Tìm *a, b* để hệ phương trình vô số nghiệm.

(Đề 2-K52)

(Đ/s: a) (2;-1;1;3) b) a=-1, b=-9)

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 3. Biện luận về số nghiệm của hệ phương trình theo a và b

i) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 - 3x_4 = b \end{cases}$ **(Đề 1-K53)**

ii) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + ax_4 = b \end{cases}$ **(Đề 2-K53)**

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 4. Giải hệ phương trình

i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -10 \end{cases}$$ **(Đề 3-K54)**

ii) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$$ **(Đề 4-K54)**

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 4. Giải hệ phương trình

i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 = -10 \end{cases}$$ **(Đề 3-K54)**

ii) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 6 \end{cases}$$ **(Đề 4-K54)**

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 5. Tìm giá trị của tham số thực a để hệ có nghiệm duy nhất

i) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 = 5 \end{cases}$$ **(Đề 3-K51)**

ii) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 = 5 \\ 3x_1 + 5x_2 + (a+2)x_3 = 7 \end{cases}$$ **(Đề 4-K51)**

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM

MỘT SỐ ĐỀ THI

Đại Số Tuyến Tính

Bài 6. Cho hệ phương trình

i) $\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 + 16x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 3x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

(Đề 1-hè 2010)

ii) $\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 14x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

(Đề 2-hè 2010)

a) Giải hệ khi $\lambda=1$

b) Với giá trị nào của λ thì số chiều của không gian nghiệm bằng 2?

Created by demo-version of Universal Document Converter. Full version doesn't ad
WWW.PRINT-DRIVER.COM