Chương 3: Hàm nhiều biến số

Trần Minh Toàn [1]

Viện Toán ứng dụng và Tin học, ĐHBK Hà Nội

Hà Nội, tháng 1 năm 2012

[1] Email: toantm24@gmail.com

Nội dung

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Định nghĩa 1.1

Xét tập hợp

$$D \subseteq \mathbb{R}^n; \quad D = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\right\} \neq \emptyset$$

và tập hợp $E \subseteq \mathbb{R}$.
Ánh xạ

$$\begin{aligned} &f : D \to E \text{ xác định bởi} \\ &x \in D \longmapsto u = f(x) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in E \end{aligned}$$

gọi là hàm số của n biến số độc lập $x_1, x_2, \ldots, x_n$ xác định trên tập hợp D.
Tập hợp D gọi là miền xác định của hàm số f, tập $f(D)$ gọi là miền giá trị của hàm số f.
Trong trường hợp $n = 2$ hay $n = 3$ ta thường ký hiệu $z = f(x, y)$ hay $u = f(x, y, z)$ tương ứng.

Ở đây ta chỉ xét đối với hàm số hai biến độc lập, số biến > 2 được suy ra tương tự.

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Ví dụ 1

Tìm miền xác định của hàm và tính giá trị của hàm tại điểm P:

- $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+2y-3}}{x^2-1}, \quad P(-2; 10.5).$

  Giải:

$$D = \{(x,y) | x + 2y - 3 \geq 0,\ x \neq \pm 1\}; \quad f(P) = \frac{4}{3}.$$

- $z = f(x,y) = (x+y)\ln\left(y^2+2x\right), \quad P(2,3).$

  Giải:

$$D = \left\{(x,y) | y^2 + 2x > 0\right\}; \quad f(P) = f(2,3) = (2+3)\ln\left(3^2+2.2\right) = 5\ln 13.$$

Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa

Ví dụ 1

Tìm miền xác định của hàm và tính giá trị của hàm tại điểm P:

- $z = f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+2y-3}}{x^2-1}, \quad P(-2; 10.5).$

  Giải:

$$D = \{(x,y) | x + 2y - 3 \geq 0,\ x \neq \pm 1\}; \quad f(P) = \frac{4}{3}.$$

- $z = f(x,y) = (x+y)\ln\left(y^2 + 2x\right), \quad P(2,3).$

  Giải:

$$D = \left\{(x,y) | y^2 + 2x > 0\right\}; \quad f(P) = f(2,3) = (2+3)\ln\left(3^2 + 2.2\right) = 5\ln 13.$$

Nội dung

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.1

Ta nói dãy điểm $M_n\left(x_n, y_n\right)$ hội tụ đến điểm $M_0\left(x_0, y_0\right)$ trong $\mathbb{R}^2$ và ký hiệu là $M_n \to M_0$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Định nghĩa 2.2

Hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là L khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \rho < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

trong đó $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; hoặc

$$\forall M_n\left(x_n, y_n\right) \to M_0\left(x_0, y_0\right) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right) = L.$$

Ký hiệu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L.$$

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.1

Ta nói dãy điểm $M_n\,(x_n, y_n)$ hội tụ đến điểm $M_0\,(x_0, y_0)$ trong $\mathbb{R}^2$ và ký hiệu là $M_n \to M_0$ nếu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Định nghĩa 2.2

Hàm số $f(x, y)$ có giới hạn là L khi $(x, y) \to (x_0, y_0)$ nếu

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : 0 < \rho < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon,$$

trong đó $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; hoặc

$$\forall M_n\,(x_n, y_n) \to M_0\,(x_0, y_0) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f\,(x_n, y_n) = L.$$

Ký hiệu

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = L.$$

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 1

Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ với $f(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \notin D$.

Với $0 < \varepsilon < 1$ và (x,y) sao cho $0 < \rho = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ta có

$$|f(x,y) - 0| = \frac{2\,|x|\,y^2}{x^2+y^2} < 2\,|x| < 2\rho < \varepsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Giới hạn hàm nhiều biến

Ví dụ 2

Cho hàm $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Xác định $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giải: Chú ý rằng $(0,0) \in D$. Ta có

- $f(x,y) \to 1$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Ox;
- $f(x,y) \to -2$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo trục Oy;
- $f(x,y) \to \dfrac{1-2k^2}{1+k^2}$ khi $(x,y) \to (0,0)$ dọc theo đường thẳng $y = kx$.

Do đó, $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Giới hạn và liên tục

Sự liên tục của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.3

Hàm số $f(x, y)$ gọi là liên tục tại điểm $(a, b) \in D$ nếu

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ gọi là liên tục trên D.

Ví dụ 3

Cho $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 2y + 1}}{x - 1}$. Chứng minh rằng f liên tục tại gốc toạ độ.

Giải: Ta có $f(0, 0) = -1$ và

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{x + 2y + 1}}{x - 1} = -1 = f(0, 0).$$

Giới hạn và liên tục

Sự liên tục của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.3

Hàm số $f(x,y)$ gọi là liên tục tại điểm $(a,b) \in D$ nếu

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b).$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ gọi là liên tục trên D.

Ví dụ 3

Cho $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1}$. Chứng minh rằng f liên tục tại gốc toạ độ.

Giải: Ta có $f(0,0) = -1$ và

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1} = -1 = f(0,0).$$

Giới hạn và liên tục

Sự liên tục của hàm nhiều biến

Định nghĩa 2.3

Hàm số $f(x,y)$ gọi là liên tục tại điểm $(a,b) \in D$ nếu

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = f(a,b).$$

Hàm số liên tục tại mọi điểm trong miền $D \subset \mathbb{R}^2$ gọi là liên tục trên D.

Ví dụ 3

Cho $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1}$. Chứng minh rằng f liên tục tại gốc toạ độ.

Giải: Ta có $f(0,0) = -1$ và

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x+2y+1}}{x-1} = -1 = f(0,0).$$

Giới hạn và liên tục

Sự liên tục của hàm nhiều biến

Ví dụ 4

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ liên tục tại gốc toạ độ;
- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3y^2}{x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ không liên tục tại gốc toạ độ.

Nội dung

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm riêng

Định nghĩa 3.1

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định và liên tục trên miền $\mathcal{D}$. Với $(x, y) \in \mathcal{D}$, giữ y không đổi, cho x số gia Δx ta có điểm $(x + \Delta x, y) \in \mathcal{D}$. Nếu tồn tại

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng (cấp 1) của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x, y), ký hiệu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = D_x f.$$

Tương tự ta cũng có đạo hàm riêng của hàm f theo biến số y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = D_y f.$$

Từ định nghĩa ta thấy: tính đạo hàm riêng có quy tắc giống như tính đạo hàm của hàm số một biến số, nghĩa là khi tính theo x thì xem y là hằng số, còn khi tính theo y thì xem x là hằng số.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm riêng

Ví dụ 1

Cho $f(x,y)=\sqrt{2x+3y^2+1}$. Tìm $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ và tính giá trị của chúng tại điểm $(2,4)$.

Giải:

$$f_x^{'} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y^2+1}}; \quad f_x^{'}(2,4)=\frac{1}{\sqrt{53}}$$

$$f_y^{'} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{3y}{\sqrt{2x+3y^2+1}}; \quad f_y^{'}(2,4)=\frac{12}{\sqrt{53}}$$

Ví dụ 2

Cho $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Chứng minh $f_x^{'}(0,0)=0$, $f_y^{'}(0,0)=0$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm riêng

Ví dụ 1

Cho $f(x,y) = \sqrt{2x+3y^2+1}$. Tìm $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ và tính giá trị của chúng tại điểm $(2,4)$.

Giải:

$$
\begin{aligned}
f_x' &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y^2+1}}; \quad f_x'(2,4) = \frac{1}{\sqrt{53}} \\
f_y' &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{3y}{\sqrt{2x+3y^2+1}}; \quad f_y'(2,4) = \frac{12}{\sqrt{53}}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 2

Cho $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Chứng minh $f_x'(0,0) = 0$, $f_y'(0,0) = 0$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm riêng

Ví dụ 1

Cho $f(x,y)=\sqrt{2x+3y^2+1}$. Tìm $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ và tính giá trị của chúng tại điểm $(2,4)$.

Giải:

$$f_x^{'} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2x+3y^2+1}};\quad f_x^{'}(2,4)=\frac{1}{\sqrt{53}}$$

$$f_y^{'} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{2x+3y^2+1} = \frac{3y}{\sqrt{2x+3y^2+1}};\quad f_y^{'}(2,4)=\frac{12}{\sqrt{53}}$$

Ví dụ 2

Cho $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Chứng minh $f_x^{'}(0,0)=0,\ f_y^{'}(0,0)=0$.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân toàn phần (cấp 1)

Định nghĩa 3.2

Nếu số gia

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\rho,$$

trong đó A, B không phụ thuộc vào $\Delta x, \Delta y$;
$\alpha \to 0$ khi $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ thì ta nói hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm (x, y).
Phần chính bậc nhất $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân toàn phần của hàm số $f(x, y)$ tại điểm (x, y), ký hiệu $dz = A.\Delta x + B.\Delta y$ và được tính theo công thức:

$$dz = f_x^{'}(x, y)dx + f_y^{'}(x, y)dy,$$

trong đó $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$.

Đạo hàm và vi phân

Vi phân toàn phần (cấp 1)

Ví dụ 3

Xét hàm $z(x,y)=\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\frac{1}{2\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}}\left(\cos\left(x^2+y^2\right)\right)'_x$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}}\left[-\sin\left(x^2+y^2\right).2x\right]=-\frac{x\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}}.$$

Tương tự ta cũng có $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_y=-\dfrac{y\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}}$.

Vi phân toàn phần $dz=-\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\cos\left(x^2+y^2\right)}}\left[xdx+ydy\right]$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

1. Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi theo các biến số trung gian x và y còn $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (t là biến độc lập), φ, ψ là những hàm khả vi thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2. Giả sử $z = f(u)$ khả vi theo biến số u; còn $u = \varphi(x, y)$ khả vi theo các biến số độc lập x, y thì ta có các đạo hàm riêng được tính bởi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'}.$$

3. Giả sử $z = f(u, v)$ khả vi theo các biến số u và v còn $u = u(x, y), v = v(x, y)$ khả vi theo các biến số x, y thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'} + f_v^{'}.v_x^{'}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'} + f_v^{'}.v_y^{'}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

1. Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi theo các biến số trung gian x và y còn $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (t là biến độc lập), φ, ψ là những hàm khả vi thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2. Giả sử $z = f(u)$ khả vi theo biến số u; còn $u = \varphi(x, y)$ khả vi theo các biến số độc lập x, y thì ta có các đạo hàm riêng được tính bởi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u . u'_x; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_u . u'_y.$$

3. Giả sử $z = f(u, v)$ khả vi theo các biến số u và v còn $u = u(x, y), v = v(x, y)$ khả vi theo các biến số x, y thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u . u'_x + f'_v . v'_x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_u . u'_y + f'_v . v'_y.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

1. Giả sử $z = f(x,y)$ khả vi theo các biến số trung gian x và y còn $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (t là biến độc lập), φ, ψ là những hàm khả vi thì

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2. Giả sử $z = f(u)$ khả vi theo biến số u; còn $u = \varphi(x,y)$ khả vi theo các biến số độc lập x, y thì ta có các đạo hàm riêng được tính bởi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'}.$$

3. Giả sử $z = f(u,v)$ khả vi theo các biến số u và v còn $u = u(x,y), v = v(x,y)$ khả vi theo các biến số x, y thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_u^{'}.u_x^{'} + f_v^{'}.v_x^{'}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_u^{'}.u_y^{'} + f_v^{'}.v_y^{'}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

Ví dụ 4

Cho $z = z(x, y) = x^2 e^y + 3xy^4$, trong đó $x = \sin 2t,\ y = \cos^2 t$. Tính $z'(t)$.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \left(2xe^y + 3y^4\right) . (2 \cos 2t) + \left(x^2 e^y + 12xy^3\right) . (-2 \sin t \cos t) . \end{aligned}$$

Khi $t = 0$ ta có $x = 0,\ y = 1$ và $z'(0) = 2 \times 3 - 0 = 6$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

Ví dụ 4

Cho $z = z(x, y) = x^2 e^y + 3xy^4$, trong đó $x = \sin 2t,\ y = \cos^2 t$. Tính $z'(t)$.
Giải: Ta có

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \left(2xe^y + 3y^4\right) . (2\cos 2t) + \left(x^2 e^y + 12xy^3\right) . (-2\sin t \cos t) .
\end{aligned}
$$

Khi $t = 0$ ta có $x = 0,\ y = 1$ và $z'(0) = 2 \times 3 - 0 = 6$.

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm hợp

Ví dụ 5

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa 3.3

Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 1 gọi là đạo hàm riêng cấp 2

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = z''_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = z''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = z''_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = z''_{yy}$$

(chú ý khi tính đạo hàm riêng theo biến này thì biến kia xem là hằng số).

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Chú ý 3.1

Trong các đạo hàm riêng cấp hai ta gặp các đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, gọi là các đạo hàm riêng hỗn hợp.
Người ta đã chứng minh được rằng: nếu hàm số $z = f(x, y)$ liên tục và có các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp liên tục thì

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Tương tự ta cũng có các đạo hàm riêng cấp ba, cấp bốn, ... Trong trường hợp này ta cũng có: chẳng hạn

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Ví dụ 6

Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z(x,y) = \sin\left(x^2 + y\right) - xy$.

Giải:

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(x^2+y\right) - xy\right] = 2x\cos\left(x^2+y\right) - y;\\
z''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\cos\left(x^2+y\right) - y\right] = 2\cos\left(x^2+y\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y\right);\\
z''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x\cos\left(x^2+y\right) - y\right] = -2x\sin\left(x^2+y\right) - 1;\\
z'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\left(x^2+y\right) - xy\right] = \cos\left(x^2+y\right) - x;\\
z''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\left(x^2+y\right) - x\right] = -\sin\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Ví dụ 6

Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $z(x,y) = \sin\left(x^2+y\right) - xy$.
Giải:

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(x^2+y\right) - xy\right] = 2x\cos\left(x^2+y\right) - y;\\
z''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\cos\left(x^2+y\right) - y\right] = 2\cos\left(x^2+y\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y\right);\\
z''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x\cos\left(x^2+y\right) - y\right] = -2x\sin\left(x^2+y\right) - 1;\\
z'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\left(x^2+y\right) - xy\right] = \cos\left(x^2+y\right) - x;\\
z''_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\left(x^2+y\right) - x\right] = -\sin\left(x^2+y\right).
\end{aligned}$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm và vi phân cấp cao

Định nghĩa 3.4

Ta gọi vi phân của vi phân cấp 1 là vi phân cấp 2 và có công thức

$$d(dz) = d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

(chú ý $dx^2 = (dx)^2, \quad dy^2 = (dy)^2$).

Đạo hàm và vi phân

Ví dụ 7

Tính vi phân cấp hai của các hàm số $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

Giải: Viết lại z trong dạng: $z = \frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}.2x = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(x\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \sqrt{x^2+y^2} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Đổi vai trò x và y cho nhau, tương tự ta cũng có $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Tiếp theo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[x\sqrt{x^2+y^2}\right]'_y = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Vậy

$$d^2z = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx^2 + 2\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy + \frac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dy^2.$$

Đạo hàm và vi phân

Ví dụ 7

Tính vi phân cấp hai của các hàm số $z = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

Giải: Viết lại z trong dạng: $z = \dfrac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$. Ta có

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}.2x = x\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(x\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x = \sqrt{x^2+y^2} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Đổi vai trò x và y cho nhau, tương tự ta cũng có $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Tiếp theo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[x\sqrt{x^2+y^2}\right]'_y = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Vậy

$$d^2 z = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dx^2 + 2\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy + \frac{2y^2+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dy^2.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm ẩn

1. Hàm ẩn của hàm 1 biến số độc lập.
   Giả sử $F(x, y)$ là hàm số khả vi theo hai biến x và y; trong đó $y = y(x)$, x là biến số độc lập và được xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$ thì
   $$y^{'} = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^{'}(x, y)}{F_y^{'}(x, y)}, \quad F_y^{'}(x, y) \neq 0.$$
2. Hàm ẩn của hàm hai biến số độc lập x, y.
   Giả sử $F(x, y, z)$ là hàm số khả vi theo các biến số x, y, z; trong đó $z = z(x, y)$, x, y là các biến số độc lập, được xác định từ phương trình $F(x, y, z) = 0$ thì
   $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x^{'}(x, y, z)}{F_z^{'}(x, y, z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y^{'}(x, y, z)}{F_z^{'}(x, y, z)}; \quad F_z^{'}(x, y, z) \neq 0.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm ẩn

1. Hàm ẩn của hàm 1 biến số độc lập.
   Giả sử $F(x,y)$ là hàm số khả vi theo hai biến x và y; trong đó $y = y(x)$, x là biến số độc lập và được xác định từ phương trình $F(x,y) = 0$ thì

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \quad F'_y(x,y) \neq 0.$$

2. Hàm ẩn của hàm hai biến số độc lập x, y.
   Giả sử $F(x,y,z)$ là hàm số khả vi theo các biến số x, y, z; trong đó $z = z(x,y)$, x, y là các biến số độc lập, được xác định từ phương trình $F(x,y,z) = 0$ thì

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad F'_z(x,y,z) \neq 0.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm ẩn

Ví dụ 8

Tìm $y^{'}(x)$ xác định từ đẳng thức $F(x, y) = \cos(x + y) + y = 0$.
Ta có
$$F_x^{'} = -\sin(x + y); \qquad F_y^{'} = 1 - \sin(x + y) \neq 0.$$
Vậy
$$y^{'} = -\frac{-\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)} = \frac{\sin(x + y)}{1 - \sin(x + y)}.$$

Đạo hàm và vi phân

Đạo hàm hàm ẩn

Ví dụ 9

Tìm dz nếu $z = z(x, y)$ xác định từ phương trình $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1$.

Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$F(x, y, z) = \ln\frac{z}{y} + 1 - \frac{x}{z} = 0.$$

Khi đó ta có

$$F'_x = -\frac{1}{z}; \quad F'_y = \frac{y}{z}\left(-\frac{z}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}$$

$$F'_z = \frac{y}{z}.\frac{1}{y} + \frac{x}{z^2} = \frac{z+x}{z^2} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x+z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y(z+x)} \Longrightarrow dz = \frac{1}{y(z+x)}\left[zydx + z^2dy\right].$$

Nội dung

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị địa phương

Định nghĩa 4.1

Hàm số $z = f(x, y)$ có miền xác định là $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ nếu

$$\forall (x, y) \in \delta\,(x_0, y_0) := 0 < \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

thì

$$f(x, y) < f\,(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f\,(x_0, y_0)).$$

Định lý 4.1

(Điều kiện cần)
Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ mà tại đó hàm số đạt cực trị thì

$$f_x^{'}\,(x_0, y_0) = 0; \quad f_y^{'}\,(x_0, y_0) = 0. \qquad (*)$$

Các điểm thỏa mãn hệ (*) gọi là điểm dừng hoặc điểm tới hạn.

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị địa phương

Định nghĩa 4.1

Hàm số $z = f(x, y)$ có miền xác định là $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Ta nói hàm số $f(x, y)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ nếu

$$\forall (x, y) \in \delta\,(x_0, y_0) := 0 < \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

thì

$$f(x, y) < f\,(x_0, y_0) \quad (f(x, y) > f\,(x_0, y_0)).$$

Định lý 4.1

(Điều kiện cần)
Nếu hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ mà tại đó hàm số đạt cực trị thì

$$f_x^{'}\,(x_0, y_0) = 0; \quad f_y^{'}\,(x_0, y_0) = 0. \qquad (*)$$

Các điểm thỏa mãn hệ (*) gọi là điểm dừng hoặc điểm tới hạn.

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị địa phương

Định lý 4.2

(Điều kiện đủ)
Giả sử $M_0\,(x_0, y_0)$ *là một điểm dừng của hàm số* $z = f(x, y)$ *và hàm số đó có các đạo hàm riêng đến cấp hai.*
Ta gọi

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0}.$$

Nếu

$$\Delta = B^2 - AC \begin{cases} > 0, & \textit{hàm số không đạt cực trị tại } M_0 \\ = 0, & \textit{chưa kết luận được} \\ < 0, & \textit{hàm số đạt cực trị tại } M_0 \\ & \textit{và là cực đại nếu } A < 0; \textit{ cực tiểu nếu } A > 0 \end{cases}$$

Cực trị hàm hai biến số

Ví dụ 1

Tìm cực trị của hàm số sau $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

Hàm số xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tính

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$$

Cho $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 142 \end{cases}$, thu được điểm dừng $M_0(21, 20)$.

Tính

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Ta có

$$\Delta = B^2 - AC = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{144} - \frac{1}{3} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại M_0. Do $A = -\frac{2}{3} < 0$, hàm số đạt cực đại $z_{\max} = z(21, 20) = 282$.

Cực trị hàm hai biến số

Ví dụ 1

Tìm cực trị của hàm số sau $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
Hàm số xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tính

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$$

Cho $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 142 \end{cases}$, thu được điểm dừng $M_0(21, 20)$.

Tính

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Ta có

$$\Delta = B^2 - AC = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{144} - \frac{1}{3} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại M_0. Do $A = -\frac{2}{3} < 0$, hàm số đạt cực đại
$z_{\max} = z(21, 20) = 282$.

Cực trị hàm hai biến số

Ví dụ 1

Tìm cực trị của hàm số sau $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
Hàm số xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tính

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$$

Cho $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 142 \end{cases}$, thu được điểm dừng $M_0(21, 20)$.

Tính

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Ta có

$$\Delta = B^2 - AC = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{144} - \frac{1}{3} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại M_0. Do $A = -\frac{2}{3} < 0$, hàm số đạt cực đại $z_{\max} = z(21, 20) = 282$.

Cực trị hàm hai biến số

Ví dụ 1

Tìm cực trị của hàm số sau $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.
Hàm số xác định $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tính

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}$$

Cho $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 142 \end{cases}$, thu được điểm dừng $M_0(21, 20)$.

Tính

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{12}.$$

Ta có

$$\Delta = B^2 - AC = \left(-\frac{1}{12}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{144} - \frac{1}{3} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại M_0. Do $A = -\frac{2}{3} < 0$, hàm số đạt cực đại $z_{\max} = z(21, 20) = 282$.

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị có điều kiện

Bài toán

Tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$.

Để giải bài toán này, ta sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange:
Lập hàm

$$u = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

trong đó λ là tham số chưa xác định.

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = 0 \\ \varphi(x,y) & = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được điểm nghi ngờ $M_o(x_o, y_o)$ và λ_o.

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị có điều kiện

Bài toán

Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

Để giải bài toán này, ta sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange:
Lập hàm

$$u = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

trong đó λ là tham số chưa xác định.

Điều kiện cần của cực trị có điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & = 0 \\ \qquad\quad \varphi(x, y) & = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được điểm nghi ngờ $M_o(x_o, y_o)$ và λ_o.

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị có điều kiện

Điều kiện đủ

Nếu $d^2u\Big|_{(M_o,\lambda_o)} > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $M_o(x_o, y_o)$ còn $d^2u\Big|_{(M_o,\lambda_o)} < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại $M_o(x_o, y_o)$.

Chú ý 4.1

Khi tính d^2u gặp dx và dy, thì chúng được liên hệ bởi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{M_o} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{M_o} dy = 0.$$

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị có điều kiện

Ví dụ 2

Tìm cực trị của hàm $z = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$.
Lập hàm nhân tử Lagrange $\Phi = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$ và tính

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2\lambda; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 3\lambda.$$

Tìm điểm dừng từ hệ $\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$. Giải hệ trên ta được
$\lambda = -\dfrac{5}{12}; \quad x = \dfrac{5}{4}; \quad y = \dfrac{5}{6}$.
Kiểm tra điều kiện đủ tại $M\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{6}\right)$ với $\lambda = -\dfrac{5}{12}$. Dễ dàng tính được

$$d^2\Phi = dxdy \quad (*).$$

Cực trị hàm hai biến số

Cực trị có điều kiện

Ví dụ 2 (tiếp)

Lại do $2x+3y-5=0$ suy ra $2dx=-3dy$ hay $dy=-\dfrac{2}{3}dx$. Thay vào (*) ta có

$$d^2\Phi\left(M,\lambda\right)=-\frac{2}{3}dx^2<0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $M\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right)$ và $z_{\max}=\dfrac{25}{24}$.

Chú ý. Trong ví dụ trên, điều kiện liên hệ giữa x và y có dạng bậc nhất, nên ta có thể dẫn về tìm cực trị của hàm một biến số
$z=\dfrac{1}{3}\left(5x-2x^2\right)$ bằng cách thay $y=\dfrac{1}{3}\left(5-2x\right)$.

Cực trị hàm hai biến số

Trị LN, BN của hàm số trong miền kín

Để tìm trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $z = f(x, y)$ trong miền kín $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ta làm như sau

1. Tìm các điểm nghi ngờ trong miền $\mathcal{D}$ (cực trị địa phương).
2. Tìm các điểm nghi ngờ trên biên Γ của miền $\mathcal{D}$ (cực trị có điều kiện, điều kiện chính là phương trình biên $\mathcal{D}$).
3. Tính giá trị tại các điểm nghi ngờ trong $\mathcal{D}$ và trên biên Γ, so sánh được giá trị lớn nhất, bé nhất.

Cực trị hàm hai biến số

Trị LN, BN của hàm số trong miền kín

Để tìm trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $z = f(x, y)$ trong miền kín $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ta làm như sau

1. Tìm các điểm nghi ngờ trong miền $\mathcal{D}$ (cực trị địa phương).
2. Tìm các điểm nghi ngờ trên biên Γ của miền $\mathcal{D}$ (cực trị có điều kiện, điều kiện chính là phương trình biên $\mathcal{D}$).
3. Tính giá trị tại các điểm nghi ngờ trong $\mathcal{D}$ và trên biên Γ, so sánh được giá trị lớn nhất, bé nhất.

Cực trị hàm hai biến số

Trị LN, BN của hàm số trong miền kín

Để tìm trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $z = f(x,y)$ trong miền kín $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ta làm như sau

1. Tìm các điểm nghi ngờ trong miền $\mathcal{D}$ (cực trị địa phương).
2. Tìm các điểm nghi ngờ trên biên Γ của miền $\mathcal{D}$ (cực trị có điều kiện, điều kiện chính là phương trình biên $\mathcal{D}$).
3. Tính giá trị tại các điểm nghi ngờ trong $\mathcal{D}$ và trên biên Γ, so sánh được giá trị lớn nhất, bé nhất.

Cực trị hàm hai biến số

Trị LN, BN của hàm số trong miền kín

Ví dụ 3